Title	3次元多様体上の古典場の理論の数式処理 (数式処理と数学研究への応用)
Author(s)	大黒, 茂
Citation	数理解析研究所講究録 (1980), 406: 78-92
Issue Date	1980-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/102348
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
406巻 1980年 78-92

3次元多様体上の古典場の理論の数式処理

東北大 工　大黒 茂

§1. 序

ここで我々が"古典場"と呼んでいる対象は"量子化"されていない古典的な重力場と電磁場とである。(但し、ここでの定式化では後者を論ずるには未だ不完全であるが[1]。)

まず、現代の微分可能多様体の概念にもとづき、Newtonの力学に対するアイデアをLeibniz流の微分形式の手法の助けによって3次元多様体上に実現した結果を、文献1)に従ってテンソル形式で与える[1]。その結果は計量が $g_{ij}=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ の場合に、従来のNewton力学を再現するものとなっている。この点で、我々の理論は、計量に対する上の条件の他に、$(g_{44}+1)\propto$(重力ポテンシアル)である場合に、Newton力学を再現するとされている一般相対論[2]と本質的に異なっている。又、我々の立場ではポテンシアルはスカラー函数であるが、一般相対論では、それはテンソルの性格をもっており、スカラーではないとされている点[3]でも異なっている。

（§2） 次に、我々の理論での重力場 T_{ij} を $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ で表現することを考える。（ここで、x は局所座標、ドットはパラメーターとみなした時間による微分を意味する。）（§3） 次に、数式処理言語REDUCE-2によるそのプログラムと出力の例を偏平回転楕円体座標に対して与える。（§4） 最後の節（§5）で、付録として、我々の立場と数理科学の現状との関係について、いくつかの注意を述べておく。

§2、定式化

ここでは文献1）の§2の要点について述べよう。

良く知られているように、保存系の Newton 力学は次の二式に要約される。

運動方程式、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mathrm{grad}\, V \tag{2-1}$$

Poisson 方程式、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V = 4\pi G\rho. \tag{2-2}$$

ここで、$\vec{r}=(x, y, z)$ は質点の位置を示す Descartes 座標、t は時間、V は質量密度 ρ から作られる重力ポテンシアル、G は万有引力の定数である。

3次元多様体への一般化は次のようにすればよい。$x \equiv (x^1, x^2, x^3)$ を局所座標とする。まず(2-1)について、次のおきかえをする。加速度 → 速度ベクトルの共変微分係数, grad V → Vの方向微分係数。従って、我々は次式を得る。

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = -g^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j}. \qquad (2-3)$$

(2-2)については Laplace-Beltrami の作用素△を用いて次のようにおく。

$$\Delta V \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\rho(x). \quad (2-4)$$

(2-3)と(2-4)で、(g_{ij})は計量テンソル、$g \equiv \det|g_{ij}|$, Γ^i_{jk}は接続係数、$\dot{x}^i$はx^iの時間微分を表す。$\rho(x)$は質量(擬)密度で、$\rho(x)/\sqrt{g}$が座標変換に対して不変量となる。

以下では次の仮定をおく。

1)多様体は Riemann 多様体(従ってΓ^i_{jk}は Christoffel 記号 $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ でおきかえられる。)

2)ポテンシアル函数(スカラー)$V(x)$の存在。

T^{jk}を次式で定義する。

$$\sqrt{g}\, T^{jk} = -\partial V/\partial x^i, \qquad T^{jk} = -T^{kj}. \qquad (2-5)$$

ここで、(i, j, k)は点列(1, 2, 3)の任意の巡回置換である。重力場T_{ij}を次式で定義する。

$$T_{ij} = g_{il} g_{jm} T^{lm} . \qquad (2-6)$$

空間の領域Dの中の全質量M′は

$$M' = \int_D \rho(x) dx^1 dx^2 dx^3 = -\int_{\partial D} (T_{12} dx^1 dx^2 + T_{23} dx^2 dx^3 + T_{31} dx^3 dx^1) \qquad (2-7)$$

で与えられる。この式の第二の等号は（2−4），（2−5）及び（2−6）から得られる。この事実は3次元の場合の特徴である。（2−7）の結果はGauss−Stokesの定理に相当するものである。

§3. T_{ij} の数式処理について.

さて、我々の運動方程式（2−3）に対しては、従来のNewton力学から解析力学への移行のような手法は使えない。即ち、Lagrange函数やHamilton函数は存在せず、従って、それらによる定式化は成り立たないのである。このことは従来の解析力学の教科書[4)]において、Newtonの運動方程式を（2−3）で置き換えてみれば容易に分る。

そこで、この節では、（2−6）で定義された重力場 T_{ij} を（2−3）及び（2−5）を用いて、$\{x, \dot{x}, \ddot{x}\}$ で表現することを考えよう。これは、質点に及ぼす重力場の強さをその質点の運動に関するデーターで表現することを意味する。これ

は次の手順で計算出来る。

1．計量テンソル(g_{ij})を局所座標を使って与える。

2．(g_{ij})の逆行列(g^{lm})及び$g \equiv \det|g_{ij}|$を計算する。

3．g_{ij}から$\left\{ {k \atop lm} \right\}$を求める公式を用いて、$\left\{ {k \atop lm} \right\}$を計算する。

4．(2−3)より，$\partial V/\partial x^i$を$(x, \dot{x}, \ddot{x})$を用いて表現する。

5．(2−5)より，T^{lm}を計算する。

6．(2−6)より，重力場T_{ij}を計算する。

これらの計算は，テンソル代数及びテンソルの微分から成っており，数式処理によって実行可能である。

§4．REDUCE−2による例．

この節では，前節の手順に従って，局所座標として偏平回転楕円体座標をとった時のT_{ij}の，REDUCE−2の言語[5]による数式処理の具体例を示そう。

(u, v, φ)を偏平回転楕円体座標とすると，計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} c^2(\sinh^2 u + \cos^2 v) & & 0 \\ & c^2(\sinh^2 u + \cos^2 v) & \\ 0 & & c^2\cosh^2 u \sin^2 v \end{pmatrix} \qquad (4-1)$$

で与えられる。ここでcは定数である。(g_{ij})が対角型の時

は次式が成り立つ[6)]。

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2g_{ii}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \right). \quad (4-2)$$

ここで、和についてのEinsteinの記法は用いていない。

東北大学大型計算機センターのACOS900を用いて行ったプログラムとその出力結果を以下に示す。CPUの料金は約300円程であった。

これらの結果の、天体の運動への応用が興味深い。

```
RESTORE(30)
 BEGIN NIL
  INTEGER PROCEDURE DELTA(I,J);
  BEGIN INTEGER I,J;
  IF I EQ J THEN RETURN 1 ELSE RETURN 0;
   END;
   ARRAY GG(3,3);
   OPERATOR X,PX,AX;
   OPERATOR COSH,SINH;
    GG(1,1):=CC**2*(SINH(X(1))**2+COS(X(2))**2)$
    GG(2,2):=GG(1,1)$
    GG(3,3):=CC**2*COSH(X(1))**2*SIN(X(2))**2$
  IF ARB I NEQ ARB J LET DF(X(I),X(J))=0;
  FOR ALL X,Y LET DF(SINH(Y),X)=COSH(Y)*DF(Y,X),DF(COSH(Y),X)=
       SINH(Y)*DF(Y,X),DF(COS(Y),X)=-SIN(Y)*DF(Y,X),
  DF(SIN(Y),X)=COS(Y)*DF(Y,X);
  ARRAY GAM(3,3,3);
  FOR I:=1:3 DO FOR J:=1:3 DO FOR K:=1:3 DO GAM(I,J,K):=
   (DELTA(I,J)*DF(GG(I,I),X(K))+DELTA(I,K)*DF(GG(I,I),X(J))
   -DELTA(J,K)*DF(GG(J,J),X(I)))/(2*GG(I,I));
  ARRAY DEFPH(3);
   FOR I:=1:3 DO DEFPH(I):=FOR M:=1:3 SUM GG(I,M)*AX(M)+FOR J:=
    1:3 SUM FOR K:=1:3 SUM GG(I,M)*PX(J)*PX(K)*GAM(M,J,K);
   ARRAY TT(3,3),T(3,3);
   PG:=FOR I:=1:3 PRODUCT GG(I,I);
   RPG:=1/PG**(1/2);
   FOR J:=1:3 DO BEGIN INTEGER K,L;
   IF J LEQ 2 THEN K:=J+1
   ELSE K:=J-2;
   IF J LEQ 1 THEN L:=J+2 ELSE L:=J-1;
    TT(J,K):=-DEFPH(L)*RPG;
   LET TT(K,J)=-TT(J,K);
   END;
   FOR I:=1:2 DO FOR J:=I+1:3 DO BEGIN T(I,J):=FOR L:=1:3 SUM FOR M:=
     1:3 SUM GG(I,L)*GG(J,M)*TT(L,M);
   LET T(J,I)=-T(I,J);
   END;
    FOR I:=1:3 DO FOR J:=1:3 DO WRITE "T(",I,",",J,") :=",T(I,J);
  END;
```

```
T(1,1) :=0

            6                                     5
T(1,2) :=(CC *SIN(X(2))*COSH(X(1))*( - 2*COS(X(2)) *PX(3)*PX(2)*

                                   4
          COSH(X(1)) - 2*COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)

                        4                                          3
          ) - COS(X(2)) *AX(3)*SIN(X(2))*COSH(X(1)) - 4*COS(X(2)) *

                     2                                     2
          SINH(X(1)) *PX(3)*PX(2)*COSH(X(1)) - 4*COS(X(2)) *SINH(X(

             3                                  2           2
          1)) *PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)) - 2*COS(X(2)) *SINH(X(1)) *AX(

                                                           4
          3)*SIN(X(2))*COSH(X(1)) - 2*COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(3)*

                                            5
          PX(2)*COSH(X(1)) - 2*SINH(X(1)) *PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)) -

                     4                                 (1/2)
          SINH(X(1)) *AX(3)*SIN(X(2))*COSH(X(1))))/PG

            6           2           2          4              3
T(1,3) :=(CC *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) *(COS(X(2)) *AX(2) - COS(X(2))

                2                      2           3      2
          *PX(3) *SIN(X(2))*COSH(X(1))  - COS(X(2)) *PX(2) *SIN(X(2

                       3      2                          2
          )) + COS(X(2)) *PX(1) *SIN(X(2)) + 2*COS(X(2)) *SINH(X(1)

            2                    2
          ) *AX(2) + 2*COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(2)*PX(1)*COSH(X(1))

                                  2      2                    2
           - COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(3) *SIN(X(2))*COSH(X(1))  -

                                2      2
          COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(2) *SIN(X(2)) + COS(X(2))*SINH(X

              2      2                       4
          (1)) *PX(1) *SIN(X(2)) + SINH(X(1)) *AX(2) + 2*SINH(X(1))

          3                         (1/2)
           *PX(2)*PX(1)*COSH(X(1))))/PG
```

```
            6                                       5
T(2,1) :=(CC *SIN(X(2))*COSH(X(1))*(2*COS(X(2)) *PX(3)*PX(2)*COSH(X

                            4
          (1)) + 2*COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)) +

                    4                                     3
          COS(X(2)) *AX(3)*SIN(X(2))*COSH(X(1)) + 4*COS(X(2)) *SINH

                  2                            2           3
          (X(1)) *PX(3)*PX(2)*COSH(X(1)) + 4*COS(X(2)) *SINH(X(1))

                                                  2         2
          *PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)) + 2*COS(X(2)) *SINH(X(1)) *AX(3)*

                                                         4
          SIN(X(2))*COSH(X(1)) + 2*COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(3)*PX(2

                                        5
          )*COSH(X(1)) + 2*SINH(X(1)) *PX(3)*PX(1)*SIN(X(2)) + SINH

                  4                                 (1/2)
          (X(1)) *AX(3)*SIN(X(2))*COSH(X(1))))/PG

T(2,2) :=0

            6          2          2          4
T(2,3) :=(CC *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) *( - COS(X(2)) *AX(1) + 2*COS(X

              3                                 2          2
          (2)) *PX(2)*PX(1)*SIN(X(2)) - 2*COS(X(2)) *SINH(X(1)) *AX

                             2                2          2
          (1) + COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(3) *SIN(X(2)) *COSH(X(1))

                        2               2                          2
           + COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(2) *COSH(X(1)) - COS(X(2)) *

                           2                                     2
          SINH(X(1))*PX(1) *COSH(X(1)) + 2*COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX

                                               4              3
          (2)*PX(1)*SIN(X(2)) - SINH(X(1)) *AX(1) + SINH(X(1)) *PX(

            2          2                          3     2
          3) *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) + SINH(X(1)) *PX(2) *COSH(X(1))

                        3    2                (1/2)
           - SINH(X(1)) *PX(1) *COSH(X(1))))/PG
```

```
          6         2           2            4
T(3,1) :=(CC *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) *( - COS(X(2)) *AX(2) + COS(X(2

            3      2                      2           3     2
         )) *PX(3) *SIN(X(2))*COSH(X(1))  + COS(X(2)) *PX(2) *SIN(

                          3      2                         2
         X(2)) - COS(X(2)) *PX(1) *SIN(X(2)) - 2*COS(X(2)) *SINH(X

              2                   2
         (1)) *AX(2) - 2*COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(2)*PX(1)*COSH(X(

                                      2      2                    2
         1)) + COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(3) *SIN(X(2))*COSH(X(1))

                                    2      2
          + COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(2) *SIN(X(2)) - COS(X(2))*

                     2      2                    4
         SINH(X(1)) *PX(1) *SIN(X(2)) - SINH(X(1)) *AX(2) - 2*SINH

                 3                                 (1/2)
         (X(1)) *PX(2)*PX(1)*COSH(X(1))))/PG

          6          2           2          4
T(3,2) :=(CC *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) *(COS(X(2)) *AX(1) - 2*COS(X(2)

           3                                    2           2
         ) *PX(2)*PX(1)*SIN(X(2)) + 2*COS(X(2)) *SINH(X(1)) *AX(1)

                     2                   2         2
          - COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(3) *SIN(X(2)) *COSH(X(1)) -

                   2                   2                    2
         COS(X(2)) *SINH(X(1))*PX(2) *COSH(X(1)) + COS(X(2)) *SINH

                     2                                     2
         (X(1))*PX(1) *COSH(X(1)) - 2*COS(X(2))*SINH(X(1)) *PX(2)*

                                    4                     3      2
         PX(1)*SIN(X(2)) + SINH(X(1)) *AX(1) - SINH(X(1)) *PX(3) *

                   2                      3      2
         SIN(X(2)) *COSH(X(1)) - SINH(X(1)) *PX(2) *COSH(X(1)) +

                    3      2                   (1/2)
         SINH(X(1)) *PX(1) *COSH(X(1))))/PG


T(3,3) :=0
```

§5、付録(我々の定式化から眺めた数理科学の現状)

§3でも述べたように、我々の場の理論(§2)には伝統的な解析力学の手法は役に立たない。その意味から、§3で与えた考え方は重要である。又、我々の立場から、連続の式と波動方程式との関係[1]、地球物理学及び惑星の問題への応用[7]、近日点移動と太陽の質量四重極能率[8]などの問題が既に論じられ、良い数値結果も得られている。

上の事実に鑑み、この節では、我々の理論の数理科学への影響について、若干の展望を試みる。

1)、物理学について。

我々の運動方程式が Lagrangian 及び Hamiltonian の概念を持たないことから、(カタストロフ理論[9]も、やはり、これらの概念を持たない例であった。)理論物理学での Hamiltonian による定式化は、物理現象に対する理論としては、ほとんど意味がないように思われる。(せいぜい、演習問題としての価値を持つに過ぎまい。)我々は、解析力学以前、即ち、大学2ないし3年生の段階まで立ち戻らねばならないことになる。この観点に立てば、氾濫する学術情報の整理がある程度可能となる。

2）．数学について．

我々の理論の形成の背景は、文献1），7），8），10）〜12）に示されている。特に、数学との関連では10）〜12）がある。しかし、本質的な点、即ち、§2に述べた二つの仮定については、未だ、数学的に明確にはされていない。この点に関して、最近ようやく、次のことが明らかになって来た。即ち、もし、我々が、実在の空間（3次元）に対して、Riemannの空間概念[13]よりも一般化された概念（我々は、それを locally Riemannian manifold あるいは、locally metric manifold と名付けるつもりであるが、）にもとづけば、曲率形式から、大域的に、スカラー函数 $\nabla(x)$ の存在を示すことができる[14]。この locally Riemannian manifold については、適当な機会に、近々発表できると思うので、ここでは省くことにする。これによれば、我々の、実在空間に対する概念を、Riemannの概念（1854）を超えて、修正することが可能となるであろう。そうすれば、それにもとづいて構築された一般相対論も、当然のなりゆきとして、修正をせまられることになろう。

なお、我々の理論（§2）は、多様体の局所座標を導入することによって、座標変換（これは、二人の観測者の間の変換に対応する）を消去してしまったことになっている点に注意しよう。

3）、数理学の勧め、

以上の1)，2)で述べたように、物理学及び数学（特に、微分幾何学）は、その基礎的概念において、修正をせまられていると考えるのは、筆者だけではあるまい。このような観点から、数理科学の新しい分野の誕生が望まれるわけである。我々は、これに対して、説明の便宜上、数理学（Masics）という名前を与えておこう。（この名前は、数学のMathematicsと物理学のPhysicsとから取って付けたものである。）Masicsは、従来の、理論物理学及び微分幾何学に取らわれず、かつ、それらの一般化及び修正を目ざして誕生するわけで、次の目標が課せられる。

i）　Masicsは物理現象と数学との間のインターフェイスである。

ii）　Masicsは物理的観測の、数学という言葉によるコンパイラーである。

iii）　Masicsは理論物理学、及び、純粋数学のように孤立したものではなく，それらの調和を目的としている。

iv）　Masicsはフランスの数学者集団、BOURBAKIのように、適当な集団で遂行されることが望まれる。

明日の、数理学の開花に夢を託して、一歩一歩進んで行きたいものである。

参考文献

1）．大黒 茂．電磁界理論研究会資料 EMT－77－30
（電気学会．1977）

2）．矢野 健太郎．相対性理論（至文堂．1973）

3）．A. Einstein，相対論の意味（岩波．1965）

4）．例えば．H. Goldstein，古典力学（吉岡書店．1959）

5）．A. C. Hearn, REDUCE-2 User's manual (2nd. ed.)
（Univ. of Utah，1973）

6）．C. Møller，相対性理論（みすず書房，1959）．

7）．大黒 茂．電磁界理論研究会資料 EMT－79－65．
（電気学会．1979）

8）．大黒 茂．電磁界理論研究会資料 EMT－80－54．
（電気学会．1980）．

9）．R. Thom，Stabilité Structurelle et Morphogénèse
（Benjamin, Inc. 1972）．

10）．S. Ohkuro，J. Math. Phys. 11 2005－2012 (1970)

11）．S. Ohkuro，Inter. Jour. Theor. Phys. 15 657－672
（1976）

12）．S. Ohkuro，Inter. Jour. Theor. Phys. 15 691－701
（1976）．

13）．B. Riemann，幾何学の基礎をなす仮説について．

（清水弘文堂，1970）．
14）．大黒　茂、数学会春の分科会（幾何学）講演（京都大学、日本数学会，1977）

なお、筆者の文献に関しては、直接、連絡戴けば、別刷をお送り出来ると思います。

本論文を書き上げるのに、REDUCE-2のプログラムに関して、鈴木正幸氏（現、東京大学、理）、又、端末装置の操作に関して、宮本なほみ氏（東北大学、工）の協力を得たことを感謝する。